Scuola delle Biotecnologie - ISTITUZIONI DI MATEMATICHE - a. a. 2006/2007
Prof. Margherita Fochi

Appunti precorso

1.- Polinomi

1.1. - Generalità

Def. 1.- **Monomio** nella variabile x di grado k è l'espressione : $a_k x^k$.

Def. 2.- **Polinomio** nella variabile x di grado n : $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Un polinomio formato da due monomi si dice **binomio**, se è formato da tre monomi si dice **trinomio**, ecc..

Def. 3.- **Grado del polinomio** è la massima potenza di x , con coefficiente non nullo. Le costanti sono polinomi di grado 0.

Def. 4.- **Polinomio ordinato secondo le potenze crescenti** (decrescenti) se i monomi compaiono con i gradi in ordine crescente (decrescente).

- **Principio di identità dei polinomi**. Due polinomi ordinati rispetto una lettera sono uguali se hanno ordinatamente uguali tutti i coefficienti e il termine noto.

Def. 5.- **Somma algebrica di polinomi** : è il polinomio ottenuto sommando algebricamente i coefficienti dei monomi di ugual grado.

Def. 6.- **Prodotto di polinomi** è il polinomio ottenuto moltiplicando ordinatamente i monomi del primo polinomio con i monomi del secondo polinomio. Ricordiamo che il prodotto di due monomi è il monomio avente il coefficiente uguale al prodotto dei coefficienti e parte letterale ottenuta sommando gli esponenti.

1.2. - Prodotti notevoli e scomposizione in fattori

Def. 1.- **Scomposizione in fattori:** è la trasformazione di un polinomio nel prodotto di due o più polinomi.

Def. 2.- **Polinomi irriducibili:** sono polinomi che non si possono scomporre in fattori. In questo problema si deve tuttavia indicare in quale campo si richiedono i coefficienti dei polinomi.

- **Teorema.** Per polinomi a coefficienti reali vi sono solo due tipi di fattori irriducibili: i binomi di primo grado, cioè $P_1(x) = ax + b$ e i trinomi di secondo grado con discriminante negativo, cioè $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ con discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Def. 3.- **Prodotti notevoli:** richiamiamo di seguito i principali prodotti notevoli:

- somme algebriche di potenze

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^2 + b^2 = irriducibile$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$
$$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4)$$
$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)$$

- potenze dei binomi

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

- **Guida** alla scomposizione di polinomi. Dato un polinomio da scomporre:

1. Quando è possibile raccogliamo a fattor comune.
2. Contiamo il numero dei termini e proviamo a percorrere le strade riassunte nello schema seguente:

Se il polinomio ha:	può essere riconducibile a:
- 2 termini	differenza di quadrati
	differenza di cubi
	somma di cubi
- 3 termini	quadrato di un binomio
	trinomio del tipo $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$

1.3. - Divisione tra polinomi

Def. 1.- **Divisione di polinomi** $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.Questa equivale ovviamente (per gli *x* tali che $Q(x) \neq 0$) a $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$. Deve essere grado $R(x)$ < grado $Q(x)$. In particolare se $Q(x) = (x-a)$ allora $R(x)$ è un numero.

- **Teorema del resto** Il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per il binomio $x-a$ è dato da $A(a)$.

Def. 2.- **Divisibilità di polinomi**: un polinomio è divisibile per un altro se il resto nella divisione è il polinomio nullo.
Def. 3.- **Regola di Ruffini** : è un algoritmo che serve per dividere un polinomio per un binomio del tipo $x-a$.

1.4. - Frazioni algebriche

Def. 1.- **Frazione algebrica propria** : è la frazione $\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ dove $n < m$.

Def. 2.- **Frazione algebrica impropria** : è la frazione $\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ dove $n \geq m$. Ogni frazione impropria si può ridurre a propria secondo la formula al punto 1.3.

Def. 3.- **Dominio** di una frazione algebrica è l'insieme dei valori di *x* che verificano $P_m(x) \neq 0$.

1.5. - Zeri dei polinomi

Def. 1.- **Zeri di un polinomio**: sono tutti quei valori che annullano il polinomio.

Def. 2.- **Zero semplice**: x_0 è uno zero semplice se $P_n(x)$ è divisibile per $(x-x_0)$ e non è divisibile per $(x-x_0)^2$.

Def. 3.- **Zero multiplo**: x_0 è uno zero multiplo, con molteplicità *r* , se il polinomio è divisibile per $(x-x_0)^r$, ma non è divisibile per $(x-x_0)^{r+1}$.

- **Regola** : per ottenere gli zeri dei polinomi è utile la scomposizione in fattori: da essa infatti si deducono tutte le informazioni volute.

2.- Equazioni e disequazioni algebriche

2.1. - Equazioni algebriche

Def. 1.- **Equazione algebrica** è un'equazione ottenuta uguagliando a zero un polinomio con una variabile.
Def. 2.- **Risolvere** un'equazione significa determinare tutti i valori di x che la soddisfano.
Def. 3.- **Soluzioni o radici** sono quei numeri che sostituiti all'incognita rendono vera l'uguaglianza. Sono gli zeri del polinomio a primo membro.
Def. 4.- **Soluzioni o radici multiple** sono gli zeri multipli del polinomio.

- **Teorema fondamentale dell'algebra** : se $P_n(x)$ è un polinomio di grado n a coefficienti reali, l'equazione $P_n(x) = 0$ ha esattamente n soluzioni reali o non reali, contate con la propria molteplicità.

I tipi di equazioni che esaminiamo sono

- **Equazioni algebriche di primo grado**: sono della forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$. La soluzione è $x = -\frac{b}{a}$.

- **Equazioni algebriche di secondo grado**: sono della forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Le soluzioni sono $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Nel caso in cui l'equazione sia $ax^2 + 2bx + c = 0$ si ricorda la formula risolutiva ridotta $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$.
- **Equazioni algebriche di grado *n*** : non ci sono formule risolutive generali per le equazioni di grado n>2 . Ci sono equazioni particolari risolvibili seguendo metodi ben precisi. Come esempio risolviamo le equazioni biquadratiche che sono equazioni di grado 4 del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, ponendo $x^2 = z$. Per altri casi è utile ricorrere alla scomposizione in fattori.

2.2. - Disequazioni razionali intere

Def. 1.- **Disuguaglianza** è ogni relazione del tipo $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

- Le principali proprietà delle disuguaglianza fra numeri reali sono le seguenti

1. Se $a < b$
   - $a + c < b + c$ per ogni numero reale c
   - $a - c < b - c$ per ogni numero reale c
   - $ac < bc$ se $c > 0$
   - $ac > bc$ se $c < 0$
   - $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ se $c > 0$
   - $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ se $c < 0$
   - $a^n < b^n$ se n *dispari*
   - $a^n < b^n$ se n *pari* e a,b *positivi*
   - $a^n > b^n$ se n *pari* e a,b *negativi*
   - $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ se a,b *concordi*

2. Se $a < b$, $c < d$ allora $a + c < b + d$ per ogni numero reale a, b, c, d
   allora $ac < bd$ per ogni numero reale positivo a, b, c, d.

Def. 2.- **Disequazione** è ogni disuguaglianza fra espressioni contenenti una o più incognite. Risolvere una disequazione significa trovare tutti i valori reali che verificano la data disuguaglianza: in generale, le disequazioni hanno come soluzioni degli intervalli, cioè tutti i valori reali compresi fra due numeri dati.

Def 3.- **Disequazioni razionali intere** : siano $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ e $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_n$ due polinomi nella variabile *x*, si dice disequazione razionale intera ciascuna delle seguenti disequazioni $P(x) < Q(x)$, oppure $P(x) > Q(x)$, oppure $P(x) \leq Q(x)$, oppure $P(x) \geq Q(x)$.

I tipi di disequazioni razionali intere che esaminiamo sono

- **Disequazioni razionali intere di primo grado**: sono della forma $ax + b < 0$ con $a \neq 0$ (oppure si tratta di disequazioni con gli altri simboli di disuguaglianza che sono stati introdotti). Per il caso $ax + b < 0$ si ha come soluzione $x < -\frac{b}{a}$ se $a > 0$, $x > -\frac{b}{a}$ se $a < 0$ (per gli altri casi si ottengono risultati analoghi).

- **Disequazioni razionali intere di secondo grado**: sono della forma $ax^2 + bx + c < 0$ con $a \neq 0$ (oppure si tratta di disequazioni con gli altri simboli di disuguaglianza che sono stati introdotti).
  Schematizziamo il caso in cui si ha $a > 0$. Consideriamo la relativa equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e indichiamo con $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante e con $x_1 < x_2$ le due eventuali soluzioni.
  Allora $ax^2 + bx + c < 0$ ha come soluzioni: $x_1 < x < x_2$ se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,
  non ci sono soluzioni se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  non ci sono soluzioni se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
  Poi $ax^2 + bx + c > 0$ ha come soluzioni : $x < x_1$, $x > x_2$ se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,
  tutti i valori reali con $x \neq -\frac{b}{2a}$ se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  tutti i valori reali se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
  Ancora $ax^2 + bx + c \leq 0$ ha come soluzioni : $x_1 \leq x \leq x_2$ se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,
  l'unica soluzione è $x = -\frac{b}{2a}$ se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  non ci sono soluzioni se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
  Poi $ax^2 + bx + c \geq 0$ ha come soluzioni : $x \leq x_1$, $x \geq x_2$ se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,
  tutti i valori reali se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
  tutti i valori reali se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

- **Disequazioni razionali intere di grado superiore al secondo**: sono del tipo, ad esempio, $P(x) < 0$ dove $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Si cerca di scomporre il polinomio in fattori di primo e secondo grado, poi si risolve la disequazione imponendo che tutti i fattori siano positivi. La soluzione si ottiene a seconda dei casi, ricordando che il prodotto di due numeri entrambi positivi o entrambi negativi è positivo, il prodotto di un numero positivo per un numero negativo è negativo.

2.3. - Sistemi di disequazioni

Def 1.- **Sistemi di disequazioni** sono del tipo $\begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ R(x) < 0 \\ ....etc..... \end{cases}$. Si dice soluzione del sistema l'unione dei valori che verificano tutte le disequazioni.

2.4. - Disequazioni razionali fratte

- Sono del tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$. Si cerca di scomporre il polinomio in fattori di primo e secondo grado, poi si risolve la disequazione imponendo che tutti i fattori siano positivi. La soluzione si ottiene a seconda dei casi, ricordando che il prodotto di due numeri entrambi positivi o entrambi negativi è positivo, il prodotto di un numero positivo per un numero negativo è negativo.

2.5. - Disequazioni irrazionali

Sono di due tipi

- $A(x) > \sqrt[n]{B(x)}$ se n *dispari* le soluzioni sono $A(x)^n > B(x)$

  se n *pari* le soluzioni sono date dal sistema $\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ A(x)^n > B(x) \end{cases}$

- $A(x) < \sqrt[n]{B(x)}$ se n *dispari* le soluzioni sono $A(x)^n < B(x)$

  se n *pari* le soluzioni sono date dall' unione dei due sistemi

  $$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x)^n < B(x) \end{cases}$$

2.6. - Disequazioni con valori assoluti

Ricordiamo la definizione di valore assoluto: $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$. Le disequazioni con valore assoluto che segnaliamo sono del seguente tipo:

- $|A(x)| < a$, questa disequazione equivale a $-a < A(x) < a$ e si risolve con il sistema $\begin{cases} A(x) < a \\ A(x) > -a \end{cases}$.
- $|A(x)| > a$, questa disequazione equivale a $A(x) < -a$ e $A(x) > a$.

3.-Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

3.1. - Esponenziali e proprietà

Def. 1.- **Esponenziale** di base *a* è una funzione che si ottiene fissando il numero reale *a* e facendo variare l'esponente. La potenza a^x è definita nei casi seguenti:

- $x = n$, $n = 1,2,3,4....$ per qualsiasi $a \in R$
- $x = -n$, $n = 1,2,3,4....$ per qualsiasi $a \in R$ con $a \neq 0$
- $x = \frac{1}{n}$, $n = 2,4,6,8,....$ (pari) per qualsiasi $a \in R$ con $a \geq 0$
- $x = \frac{1}{n}$, $n = 3,5,7,9,....$ (dispari) per qualsiasi $a \in R$
- $x = -\frac{1}{n}$, $n = 2,4,6,8,....$ (pari) per qualsiasi $a \in R$ con $a > 0$
- $x = -\frac{1}{n}$, $n = 3,5,7,9,....$ (dispari) per qualsiasi $a \in R$ con $a \neq 0$
- $x = \frac{m}{n}$, $n, m \in Z$ (frazione ridotta ai minimi termini) vedere casi precedenti
- $x \in R$ per qualsiasi $a \in R$ con $a > 0$

I casi particolari sono

- $1^x = 1$
- $a^0 = 1$ per qualsiasi $a \in R$ con $a > 0$

Le proprietà principali sono

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{xy} = (a^x)^y$

3.2. - Logaritmi e proprietà

Def. 1.- **Logaritmo** in base *a* di *b* , cioè $\log_a b$, è l'esponente *x* da assegnare alla base *a* per ottenere il numero *b* . Precisamente, sia $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$ chiama logaritmo in base a di b la soluzione dell'equazione esponenziale elementare, cioè $a^x = b$ se e solo se $x = \log_a b$.

Def.2.- **Logaritmo decimale** è il logaritmo in base 10, cioè $\log_{10} x$.

Def.3.- **Logaritmo naturale o neperiano** è il logaritmo in base $a = e \approx 2{,}718$, cioè $\log_e x$, detto anche $\ln x$.

Osservazioni sui logaritmi:

- Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, quindi: $a^{\log_a b} = b$ e $\log_a a^x = x$.
- Le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base $a > 0, a \neq 1$, deve essere $b > 0$.

I casi particolari sono

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Le proprietà principali sono, supponendo sempre $a > 0, a \neq 1$

- $\log_a x^y = y \log_a x$ se $x > 0,\ y \in R$
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ se $x > 0,\ y > 0$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ se $x > 0\ \ y > 0$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ se $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0, c \neq 1$ (formula del cambiamento base)

3.3. - <u>Risoluzione di alcune equazioni esponenziali e logaritmiche</u>

Def.1.- **Equazione esponenziale** è un'equazione in cui l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.
L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b \quad , \quad \text{con} \quad a > 0 \quad b > 0 \quad \text{ed} \quad x \in R \text{ è l'incognita}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere:

- impossibile se $b \leq 0$, oppure se $b \neq 1$ e $a = 1$
- indeterminata se $a = 1$ e $b = 1$
- determinata se $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$

Per risolvere un'equazione esponenziale :

- $a^x = b$ se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti
- $a^x = b$ se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi .
- $m\ a^{f(x)} = n\ b^{g(x)}$ si passa ai logaritmi di entrambi i membri (conviene usare il log con la stessa base di uno delle basi dell'esponenziale) e si calcola opprtunamente
- $f(a^x) = c$ si pone $a^x = t$ e si procede opportunamente

Def.2.- **Equazione logaritmica** è un'equazione in cui l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

- se è possibile, trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,applicando le proprietà dei logaritmi
- determinare le soluzioni dell'equazione $f(x) = g(x)$
- eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 . Oppure, in alternativa, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

3.4. - Disequazioni esponenziali e logaritmiche

Si devono osservare le seguenti importanti relazioni fra esponenziali

- se $a > 1$ $a^x > a^y$ se e solo se $x > y$
- se $0 < a < 1$ $a^x > a^y$ se e solo se $x < y$

e da esse seguono le corrispondenti relazioni fra logaritmi

- se $a > 1$ $\log_a x > \log_a y$ se e solo se $x > y$
- se $0 < a < 1$ $\log_a x > \log_a y$ se e solo se $x < y$.

Partendo da queste relazioni e ricordando la risoluzione delle equazioni esponenziali e logaritmiche, esaminiamo qualche esempio

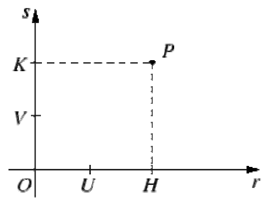
- $a^{f(x)} > a^{g(x)}$
- $a^{f(x)} > b^{g(x)}$
- $f(a^x) > c$

- $\log_k f(x) > \log_k g(x)$
- $\log_k f(x) > c$
- $f(\log_k x) > c$

4.- Elementi di geometria analitica

4.1 - Il piano cartesiano: richiami

Def. 1- Consideriamo un punto O detto **origine**, due rette r, s passanti per O orientate come in figura e due punti $U \in r$,$V \in s$ che ne individuano le unità di misura. Si è così definito un **riferimento cartesiano**; esso è detto **ortogonale** se r ed s sono ortogonali , **monometrico** se $OU = OV$. Le rette r ed s si chiamano **assi cartesiani**, r è l' **asse delle ascisse** ed s è ***l'*asse delle ordinate**



Def. 2**-** Ad ogni punto P del piano si può associare una coppia $(x, y) \in R^2$ e viceversa. e la corrispondenza è biunivoca, x è detta **ascissa** di P , y è detta **ordinata** di P e (x, y) sono le **coordinate cartesiane** di *P*. I punti sulla retta r , hanno coordinate $(x,0)$, mentre quelli sulla retta s , hanno coordinate $(0, y)$.

Def. 3**-** La **lunghezza del segmento** di estremi $A(x_1, y_2)$ $B(x_2 y_2)$ si ottiene $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Def. 4**-** Il **punto medio** del segmento *AB* è $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

4.2 - La retta reale

Def. 1**-** Fissato un riferimento cartesiano, l'equazione della generica retta r è $y = mx + q$ il numero *m* è detto **coefficiente angolare *o* pendenza** della retta, mentre *q* è detto **ordinata all'origine**. Le intersezioni di *r* con gli assi cartesiani sono $P = (0, q)$ e $Q = (-\frac{q}{m},0)$, a meno che *r* sia parallela ad uno degli assi. Le rette parallele ad *Ox* hanno un'equazione del tipo $y = c$, mentre quelle parallele ad *Oy* sono del tipo $x = c$, dove $c \in R$ è una costante.

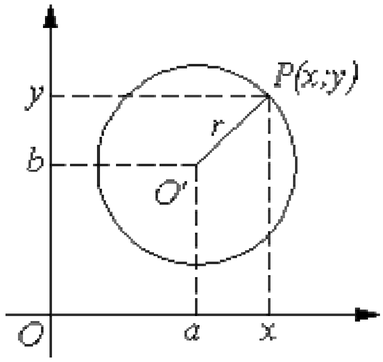
- **Retta per due punti** $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
- **Retta per un punto con coefficiente angolare dato** $y - y_1 = m(x - x_1)$
- **Rette parallele** hanno $m_1 = m_2$, **rette perpendicolari** hanno $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
- **Distanza punto retta** $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

4.3 - Circonferenza

Def. 1.- La circonferenza è il luogo geometrico dei punti *P* del piano che hanno distanza costante r da un punto fisso $O'(a,b)$ detto **centro.** La distanza r si chiama **raggio** della circonferenza.
Equazione: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Si può anche scrivere

$x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ dove $a=-\dfrac{\alpha}{2}$,

$b=-\dfrac{\beta}{2}$, $r=\sqrt{a^2+b^2-\gamma}$ e viceversa $\alpha=-2a$ $\beta=-2b$
$\gamma=a^2+b^2-r^2$.

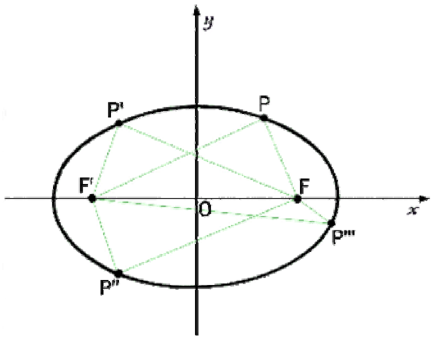


4.4 – Ellisse

Def.1. - Nel piano cartesiano, l'insieme dei punti per cui la somma delle distanze da due punti detti **fuochi** è costante si chiama ellisse.

Equazione è $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

- I **fuochi** sono $F(\pm c,0)$ dove $c=\sqrt{a^2-b^2}$ se i fuochi sono sull'asse x , altrimenti se sono sull'asse y $F(0,\pm c)$ dove $c=\sqrt{b^2-a^2}$, i **semiassi** sono rappresentati da a e b .

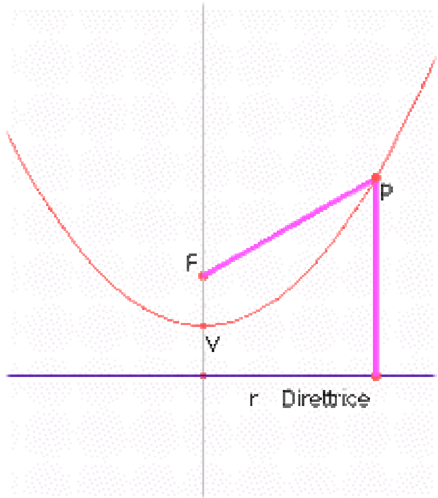


4.5 - Parabola

Def.1. È il luogo geometrico dei punti *P* del piano che hanno uguale distanza *d* da un punto *F* detto **fuoco** e da una retta *r* detta **direttrice**. Equazione è $y=ax^2+bx+c$ dove $a,b,c\in R$ sono costanti.

- Il punto *V* di ordinata minima (o massima) della parabola è detto **vertice** e ha coordinate $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

- Il **fuoco** $F(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{1-b^2+4ac}{4a})$ e la **direttrice** $y=-\dfrac{1+b^2-4ac}{4a}$

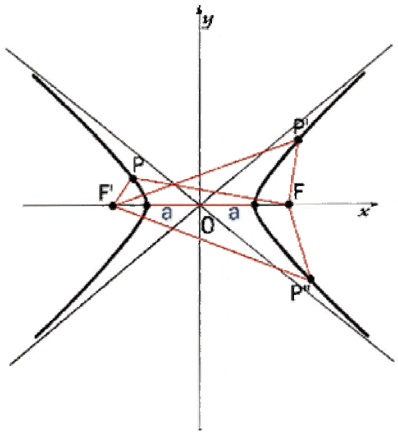


- Una parabola ha sempre il punto $C=(0,c)$ come unico punto d'intersezione con l'asse delle ordinate, mentre con l'asse delle ascisse, cioè $y=0$, l'esistenza ed il numero di punti d'intersezione dipende dalle soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. La parabola è simmetrica rispetto alla retta s di equazione $x = -\frac{b}{2a}$, parallela all'asse delle ordinate.

- Se $a > 0$ la parabola si dice **convessa** o anche che è di tipo $\bigcup$. Se $a < 0$ la parabola si dice **concava** o anche che è del tipo $\bigcap$. Si noti che se $a = 0$ la parabola degenera nella retta di equazione $y = bx + c$.

4.6. - <u>Iperbole</u>.

Def 1. -Nel piano cartesiano, l'insieme dei punti per cui la differenza delle distanze da due punti detti **fuochi** è costante si chiama iperbole. Equazione in forma normale è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



- I **fuochi** $F(\pm c, 0)$ sono i fuochi sull'asse *x* e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Le rette di equazione $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ sono gli **asintoti** dell'iperbole.

- Nel caso in cui $a = b$, gli asintoti sono ortogonali e l'iperbole è detta **equilatera**, diventa : $x^2 - y^2 = a^2$.

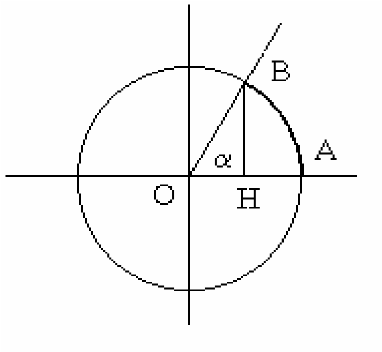
- Nel caso in cui si assumono gli asintoti come nuovi assi coordinati, l'iperbole si dice riferita agli asintoti e diventa $xy = k$

5.-Trigonometria

5.1 - Richiami

Def. 1.- **Circonferenza trigonometrica** ha per centro l' origine delle coordinate e raggio unitario. Il verso di percorrenza positivo è quello antiorario.
Def. 2.- **Radiante** angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza rettificata uguale al raggio. 1 rad = 57°17'44". Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione: $\alpha^0 : 180^0 = \alpha^{rad} : \pi$

Def.3.- **Seno**: $sen\alpha = \overline{BH}$ =ordinata del punto B secondo estremo dell'arco α (il primo estremo è in A).
Def.4.- **Coseno**: $\cos\alpha = \overline{OH}$ = ascissa del punto B secondo estremo dell'arco α (il primo estremo è in A).
Def.5.- **Tangente**: $\tan\alpha$ = rapporto, quando esiste, tra il seno e il coseno dell'angolo α e cioè quando $\cos\alpha \neq 0$.
Def.6.- **Cotangente**: $\cot an\alpha$ = rapporto, quando esiste, tra il coseno e il seno dell'angolo α e cioè quando $sen\alpha \neq 0$.



5.2 – Relazioni e variazione delle funzioni circolari

α	**senα**	**cosα**	**tanα**
15° = π/12	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18° = π/10	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
30° = π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = π/2	1	0	non esiste
180° = π	0	-1	0
270° = 3/2π	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2π	0	1	0

NOTO	**senα**	**cosα**	**tanα**
senα	senα	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$
cosα	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cosα	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$
tanα	$\dfrac{\tan\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	tanα
cotanα	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot an^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot an\alpha}{\pm\sqrt{1+\cot an^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cot an\alpha}$

- **Formule di addizione e sottrazione:**

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha\, sen\beta$$
$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha\, sen\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha\, sen\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- **Formule di duplicazione:** si ottengono dalle precedenti ponendo α=β

$$sen2\alpha=2sen\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=1-2sen^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- **Formule di bisezione:** si ottengono dalle precedenti dimezzando l’angolo α

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

- **Formule parametriche:** si ottengono ponendo $t=\tan\dfrac{x}{2}$

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$

5.3 - Equazioni e disequazioni trigonometriche

- **Equazioni di primo grado, elementari** : sono della forma

  1) $sen\alpha = m$ con $-1 \le m \le 1$: queste equazioni si risolvono ponendo $\begin{cases} \cos\alpha = x \\ sen\alpha = y \end{cases}$ e intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con l'equazione $y = m$. Se a è il più piccolo arco positivo che soddisfa l'equazione, la soluzione è $\alpha = (-1)^k a + k\pi$ con $k \in Z$.

  2) $\cos\alpha = m$ con $-1 \le m \le 1$: queste equazioni si risolvono intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con l'equazione $x = m$. se a è il più piccolo arco positivo che soddisfa l'equazione, la soluzione è $\alpha = \pm a + 2k\pi$.

- **Equazioni di primo grado, lineari** : sono della forma

  1) $asenx + b\cos x = c$: si risolvono intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con l'equazione $ay + bx = c$, che rappresenta una retta.

- **Equazioni di secondo grado** : sono della forma

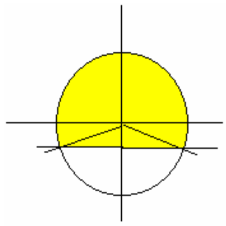
  1) $asen^2 x + bsenx + c = 0$, cioè contiene una sola funzione trigonometrica, si risolve ponendo $senx = t$ e risolvendo l'equazione algebrica ottenuta e poi l'equazione lineare.

  2) Se contiene più di una funzione si cerca, mediante le formule viste precedentemente, di trasformarla in una che contenga una sola funzione trigonometrica.

- **Disequazioni di primo grado, elementari** : sono della forma

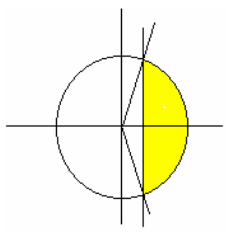
  1) $senx > m$ con $-1 \le m \le 1$: queste equazioni si possono risolvere col seguente metodo grafico

  $m \ge 1$: impossibile
  $m < -1$: sempre vera
  $m = -1$: vera $\forall x \ne \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
  $-1 < m < 1$: $\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



  2) $\cos x > m$ con $-1 \le m \le 1$: queste equazioni si possono risolvere col seguente metodo grafico

  $m \ge 1$: impossibile
  $m < -1$: sempre vera
  $m = -1$: vera $\forall x \ne \pi + 2k\pi$
  $-1 < m < 1$: $-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$,con $k \in \mathbf{Z}$



- **Disequazioni di primo grado, lineari** : nel caso di una disequazione lineare del tipo

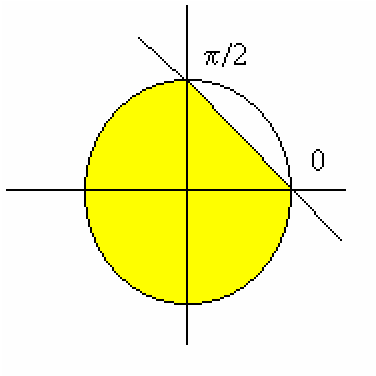
  $a sen x + b \cos x > c$ si procede come per l'equazione corrispondente, cioè si risolve intersecando la

  circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con la disequazione

  $ay + bx > c$ che rappresenta un semipiano.

  1) $sen x + \cos x < 1$ è risolta dal seguente grafico, quindi si

  ottiene così la soluzione: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, con $k \in$ **Z.**



- **Disequazioni di secondo grado** : Si risolvono come le disequazioni di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, si ottengono così delle disequazioni di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

6.-Funzioni

6.1. - Generalità

Def. 1.- **Funzione reale di variabile reale** è una relazione che associa ad ogni numero reale x, uno ed un solo numero reale y e si indica con $f : R \rightarrow R$; la variabile x è la **variabile indipendente**, mentre la variabile y è la **variabile dipendente**. Si scrive pure $y = f(x)$.

Def. 2.- **Dominio** X della funzione è l'insieme dei numeri reali in cui è definita la funzione.

Def. 3.- **Codominio** o **immagine** Y l'insieme dei valori assunti dalla funzione.

Def. 4.- **Equazione del grafico** della funzione è l' equazione $y = f(x)$ e per **grafico** si intende la rappresentazione sul piano cartesiano dei punti $(x, f(x))$. Questo piano è caratterizzato dai due assi ortogonali: l'asse orizzontale si dice asse delle ascisse o asse x e quello verticale asse delle ordinate o asse y.

Def.5.- **Funzione limitata**: è una funzione il cui grafico è contenuto in una striscia orizzontale, cioè $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$.

Def.6.- **Funzione pari**: è una funzione il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, cioè $f(x) = f(-x)$

Def.7.- **Funzione dispari**: è una funzione il cui grafico è simmetrico rispetto all'origine, cioè $f(x) = -f(-x)$.

Def.8.- **Funzione monotona**: è una funzione con il grafico sempre crescente nel dominio, cioè se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$, oppure sempre decrescente nel dominio cioè se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Def.9.- **Funzione periodica** se il grafico si ripete esattamente ad ogni intervallo di ampiezza T, cioè $f(x+T) = f(x)$.

Def.10.- **Massimo assoluto** della funzione è il più grande valore raggiunto dal grafico della funzione, cioè *M* è il massimo per *f* se $f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.

Def.11.- **Minimo assoluto** della funzione è il più piccolo valore raggiunto dal grafico della funzione, cioè *m* è il minimo per *f* se $f(x) \geq m$ per ogni $x \in X$.

Def.12.- **Massimo relativo** della funzione è quel valore *M* tale che $f(x) \leq M$ per *x* appartenente ad un opportuno intervallo.

Def.13.- **Minimo relativo** della funzione è quel valore *m* tale che $f(x) \geq m$ per *x* appartenente ad un opportuno intervallo.

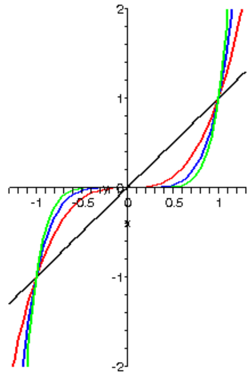
Def.14.- **Funzione iniettiva** se le rette orizzontali intersecano il grafico della funzione al più in un solo punto, cioè se per ogni $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$,

Def.15.- **Funzione suriettiva** se ogni elemento del codominio proviene da almeno un elemento del dominio.

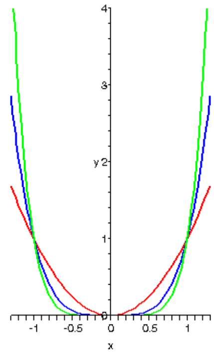
Def.16.- **Funzione biiettiva** se è sia iniettiva sia suriettiva.

Grafici di alcune funzioni elementari

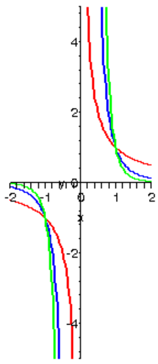
- $y = x^n$, n dispari



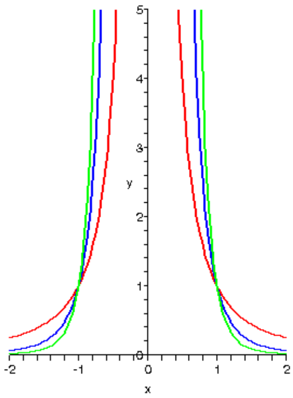
- $y = x^n$, n pari



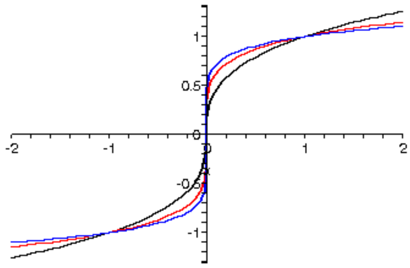
- $y = \dfrac{1}{x^n}$, n dispari



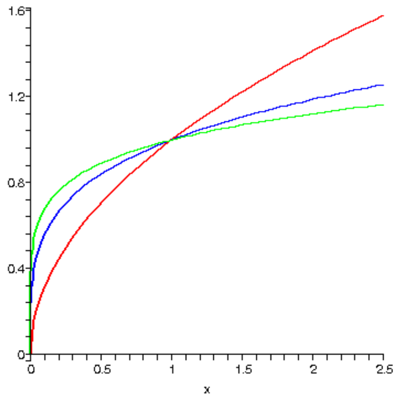
- $y = \dfrac{1}{x^n}$, n pari



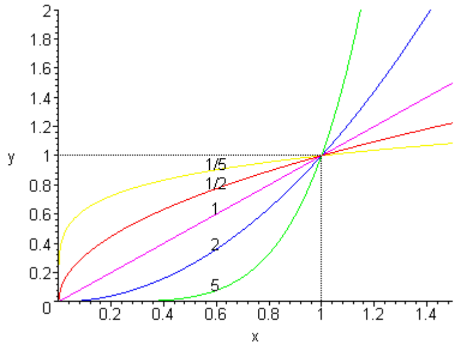
- $y = x^{\frac{1}{n}}$, n dispari



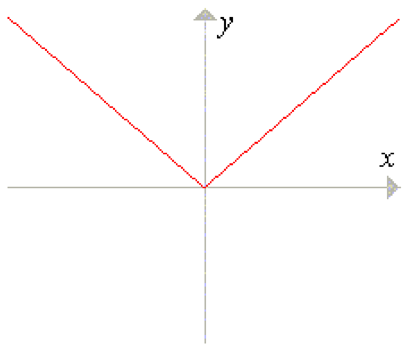
- $y = x^{\frac{1}{n}}$, n pari



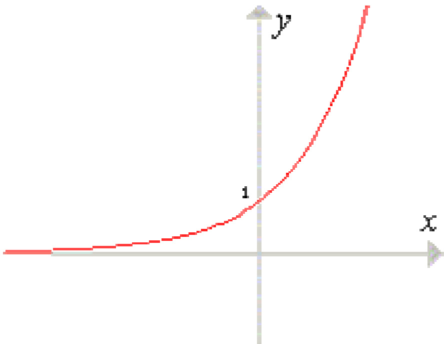
- $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$



- $y = |x|$

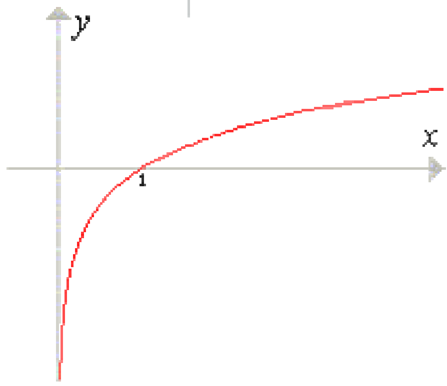


- $y = a^x$, con $a>1$



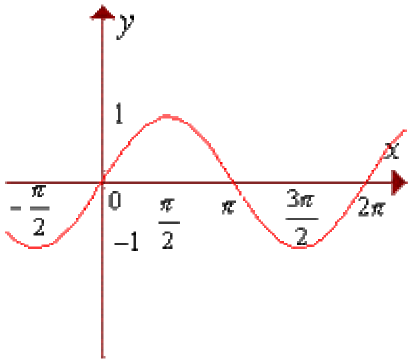
- $y = a^x$, con $0<a<1$

- $y = \log_a x$, con $a>1$

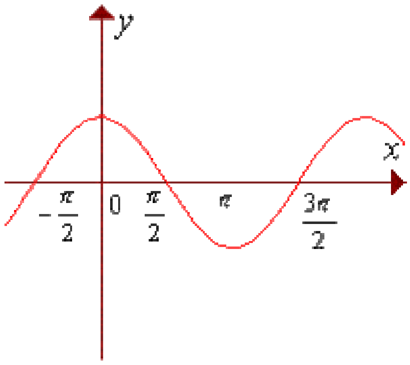


- $y = \log_a x$, con $0<a<1$

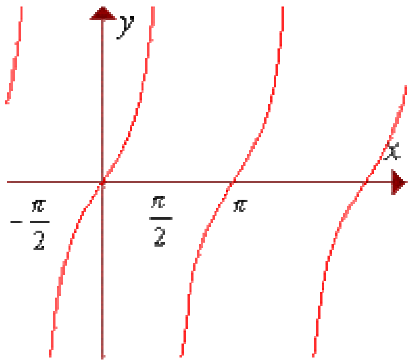
$y = senx$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



$y = \cot anx$